数理解析研究所講究録
184巻 1973年 1-11

非線形双曲型方程式の差分解法

早大 理工　小島清史

§1、序

ここでは，つぎのような初期値問題の差分解法を考える。

$$(1)\quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}f^i(t,x,u(t,x))+g(t,x,u(t,x))=0$$

$$(2)\quad u(0,x)=u_0(x)\ \in L^\infty(R^n)$$

ただし，ここで $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\frac{d}{dx_i}f^i(t,x,u(t,x))=\frac{\partial f^i(t,x,u(t,x))}{\partial x_i}+\frac{\partial f^i(t,x,u(t,x))}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}$，$i=1,2,\cdots n$ とする。

よく知られているように，上の初期値問題の解は，弱解の範囲内でも一意には定まらない。そこで Kruzkov [ ] は，vanishing viscosity method を用いて，つぎのようなエントロピー条件をみたす解が，一意に存在することを示した。

定義。$\Pi_T=[0,T)\times R^n$ で定義された有界可測関数 $u(t,x)$ が，Π_T における初期値問題(1),(2) の generalized solution であるとは，

(i)，任意の定数 k と，任意の $\varphi(t,x)\in C_0^1(\Pi_T)$，$\varphi(t,x)\geqq 0$ に

対して

$$(3)\iint_{\Pi_T}\Big\{|u(t,x)-k|\varphi_t(t,x)+\sum_{i=1}^{n}[\mathrm{sign}(u(t,x)-k)]\cdot[f^i(t,x,u(t,x))-f^i(t,x,k)]\varphi_{x_i}(t,x)$$

$$-[\mathrm{sign}(u(t,x)-k)]\Big[\sum_{i=1}^{n}f^i_{x_i}(t,x,k)+g(t,x,u(t,x))\Big]\varphi(t,x)\Big\}dxdt\geqq 0$$

(ii) $(0\ T)$ 内の測度 0 の集合 N が存在して, $t\in(0,T)-N$ ならば $u(t,x)\in L^\infty(R^n)$ かつ

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\notin N}} u(t,x)=u_0(x)\ \text{in}\ L^1_{loc}(R^n)$$

の2つの条件を満たす場合をいう。

ここで $f^i(i=1,2,\cdots n)$, g について, つぎのような仮定をおく。すなわち,

仮定Ｉ, $f^i\in C^2$, $(i=1,2,\cdots n)$, $g\in C^1$

かつ, (t,x) が Π_T, u が有界なところを動くとき, f^i の2階までの偏導関数および g の1階までの偏導関数は有界である。

仮定II, つぎのような関数 $V(v)\in C^1$ が存在する。

$$\sup\{|f^i_{x_i}(t,x,u)+g(t,x,u)|;\ (t,x)\in\Pi_T,\ |u|\leqq v\}\leqq V(v),$$

$\dfrac{dV(v)}{dv}\geqq 0$, かつ任意の正数 v_0 に対して

$$(4)\quad \int_{v_0}^{\infty}\frac{dv}{V(v)}=+\infty$$

を満たす。

以下では、簡単のために、$n=2$ の場合を扱うが、容易に分かるように、一般の場合についても、以下のことは成立する。

§2. 差分方程式

$n=2$ のとき　方程式および仮定はそれぞれ、つぎのようになる。

(5) $\frac{\partial}{\partial t}u(t,x,y)+\frac{d}{dx}f(t,x,y,u(t,x,y))+\frac{d}{dy}g(t,x,y,u(t,x,y))+h(t,x,y,u(t,x,y))=0$

(6) $u(0,x,y)=u_0(x,y)\in L^\infty$

仮定Ⅰ. $f,g\in C^2$, $h\in C^1$ かつ f,g の2階までの偏導関数および h の1階までの偏導関数は、(t,x,y) が $\Pi_T=[0,T)\times R^2$ を u が有界なところを動くとき、有界である。

仮定Ⅱ. つぎのような関数 $V(v)\in C^1$ が存在する。

$$\sup\{|f_x(t,x,y,u)+g_y(t,x,y,u)+h(t,x,y,u)|\,;\,(t,x,y)\in\Pi_T,|u|\leq v\}\leq V(v),$$

$\frac{d}{dv}V(v)\geq 0$, かつ任意の $V_0\geq 0$ に対して、

(7) $$\int_{V_0}^{\infty}\frac{dv}{V(v)}=\infty$$

を満たす。

(7) より　任意の M_0, $\alpha > 0$ に対して.

(8)　$$\int_{M_0}^{M} \frac{dv}{V(v)+\alpha} \geqq T$$

を満たすような M が存在する。

いま (8) で定まった M に対して.（$M_0 = \|u_0\|_{L^\infty}$ とおく）

$$\Omega = \{(t,x,y,u)\ ;\ (t,x,y) \in \Pi_T,\ |u| \leqq M.\}$$

とおき,

$$\frac{A}{2} = \sup_{\Omega} |f_u(t,x,y,u)|\ ,\ \frac{B}{2} = \sup_{\Omega} |g_u(t,x,y,u)|$$

とおく。

ここで

$$x' = x + (A/2)t\ ,\ y' = y + (A/2)t\ ,\ t' = t$$

なる変数変換を行なえば, (5) 式は.

$$u_{t'} + \frac{d}{dx'}\left[F(t',x',y'u) + \frac{A}{2}u\right] + \frac{d}{dy'}\left[G(t',x',y'u) + \frac{B}{2}u\right] + H(t',x',y'u) = 0$$

となる。ただし

$$F(t',x',y'u) = f(t',x' - \frac{A}{2}t', y' - \frac{A}{2}t', u)$$

等である。したがって, 一般性を失なうことなしに, (5) において,

(9)　$0 \leqq f_u(t,x,y,u) \leqq A,\ \ 0 \leqq g_u(t,x,y,u) \leqq B \ \ \text{in}\ \Omega$

としてよい。

さて Π_T に　つぎのような格子領域を定義する。

$$\Pi_T(r,p,q) = \{(kr, mp, nq)\ ;\ 0 \leqq k \leqq [T/r]\ ,\ m,n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$$

ここで r, p, q は、それぞれ固定した正の数である。

$\Pi_T(r, p, q)$ 上で (5) に対するつぎのような差分近似を考える。すなわち、

$$(10)\quad \frac{u^{k+1}_{m,n} - u^k_{m,n}}{r} + \frac{f^k_{m,n} - f^k_{m-1,n}}{p} + \frac{g^k_{m,n} - g^k_{m,n-1}}{q} + h^k_{m,n} = 0$$

ただし、ここで

$u^k_{m,n} = u(kr, mp, nq)$, $f^k_{m,n} = f(kr, mp, nq, u^k_{m,n})$ 等

を用いた。

§3. 差分方程式の解の評価

補題1. p, q, r が安定条件

$$\frac{r}{p}A + \frac{r}{q}B < 1$$

を満足するとき、

$$\frac{p}{2}\sup|f_{xx}| + \frac{q}{2}\sup|g_{yy}| < \alpha$$

を満たすような十分小さいすべての p, q に対して、

$|u^0_{m,n}| \leqq M^0$ ならば、$|u^k_{m,n}| \leqq M$ が成立する。

ただし、M は、(8) 式によって定まった定数である。

証明. (10) 式に Taylor の定理を適用して

$$u^{k+1}_{m,n} = u^k_{m,n} - \frac{r}{p}(f^k_{m,n} - f^k_{m-1,n}) - \frac{r}{q}(g^k_{m,n} - g^k_{m,n-1}) - r h^k_{m,n}$$

$$= \left[1 - \frac{r}{p}\tilde{f}_u - \frac{r}{q}\tilde{g}_u\right] u^k_{m,n} + \frac{r}{p}\tilde{f}_u u^k_{m-1,n} + \frac{r}{q}\tilde{g}_u u^k_{m,n-1}$$
$$- r\left[f_x + g_y + h\right]^k_{m,n} + r\left\{\frac{p}{2}\tilde{f}_{xx} + \frac{q}{2}\tilde{g}_{yy}\right\}$$

ただし，$\tilde{f}_u$ 等は，適当な点における f_u の値を表わすものとする。

この式より　$M^k = \sup_{m,n} |u^k_{m,n}|$ とおくと

$$M^{k+1} \leqq M^k + r(V(M^k) + \alpha)$$

これより，容易に補題の結論が得られる。

補題２，$h = (i, j)$ (i, j 整数) に対して，

$$u^k_{m,n;h} = u^k_{m+i,n+j} - u^k_{m,n}$$

とおくとき，任意の正数 X, Y と任意の h に対して

$$\sum_{\substack{|mp| \leq X \\ |nq| \leq Y}} |u^k_{m,n;h}| pq \leq F(|ip| + |jq|), \quad F(\rho) \to 0 \text{ as } \rho \to 0$$

となるような関数 F が存在する。ただし，F は p, q および r には依存しない。

証明　$h_1 = (1, 0)$　$h_2 = (0, 1)$ とおき，Taylor の定理を用いて，整理すると

$$(10)\quad u^{k+1}_{m,n;h_1} = \left(1 - \frac{r}{p}\tilde{f}^k_{u\,m,n;h_1} - \frac{r}{q}\tilde{g}^k_{u;m,n;h_1}\right) u^k_{m,n;h_1} + \frac{r}{p}\tilde{f}^k_{u\,m-1,n;h_1} u^k_{m-1,n;h_1}$$
$$+ \frac{r}{q}\tilde{g}^k_{u\,m,n-1;h_1} u^k_{m,n-1;h_1} - r\left(p\tilde{f}_{xx} + \tilde{f}_{xu} u^k_{m-1,n;h_1}\right) - r\left(\cancel{q}\,\tilde{g}_{xy} + \frac{p}{q}\tilde{g}_{xu} u^k_{m,n-1;h_2}\right)$$
$$- r\left(\tilde{h}_u u^k_{m,n;h_1} + p\tilde{h}_x\right)$$

同様にして，

$$(11)\quad u^{k+1}_{m,n;h_2} = \left(1-\frac{r}{p}\hat{f}^{k}_{u\,m,n;h_2}-\frac{r}{q}\hat{g}_{u\,m,n;h_2}\right)u^{k}_{m,n;h_2}+\frac{r}{p}\hat{f}^{k}_{u\,m-1,n;h_2}u^{k}_{m-1,n;h_2}$$
$$+\frac{r}{q}\hat{g}^{k}_{u\,m,n-1;h_2}-r\left(q\tilde{f}_{xy}+\frac{q}{p}\tilde{f}_{yu}u^{k}_{m-1,n;h_1}\right)-r\left(q\tilde{g}_{yy}+\tilde{g}_{yu}u^{k}_{m,n-1;h_2}\right)$$
$$-r\left(\hat{h}_u u^{k}_{m,n;h_2}+q\hat{h}_y\right)$$

ただし、一般に$\tilde{F}$ ($\tilde{\tilde{F}}$)は、適当な点における関数Fの値を、$\hat{F}^{k}_{u;m,n;h}$は

$$\hat{F}^{k}_{u,m,n;h}=\begin{cases}\left(F(kr,mp,nq,u^{k}_{m+i,n+j})-F^{k}_{m,n}\right)/u^{k}_{m,n;h} & (u^{k}_{m,n;h}\neq 0)\\ F^{k}_{u\,m,n} & (u^{k}_{m,n;h}=0)\end{cases}$$

を表わすものとする。

ここで $N^{\ell}(X,Y)=\sum_{\substack{-X-(k-\ell)p\leqq mp\leqq X\\ -Y-(k-\ell)q\leqq nq\leqq Y}}\{|u^{k}_{m,n;h_1}|+|u^{k}_{m,n;h_2}|\}pq$ とおくと

(10), (11) より、

$$N^{\ell+1}\leqq N^{\ell}(1+rC)+r(pD_1+qD_2)S$$

となる。ここで、S は $\{u^{k}_{m,n};|mp|\leqq X,|nq|\leqq Y\}$ の依存領域の面積を表わし、$\|f\|=\sup|f(t,x,y,u)|$ とするとき、

$$C=\max\left(\|f_{xu}\|+\frac{q}{p}\|f_{yu}\|,\ \|g_{yu}\|+\frac{p}{q}\|g_{xu}\|\right)+\|h_u\|$$

$$D_1=\|f_{xx}\|+\|g_{xy}\|+\|h_x\|\qquad D_2=\|f_{xy}\|+\|g_{yy}\|+\|h_y\|$$

である。この式より容易に

$$N^{k}\leqq\left(N^{0}+\frac{S}{C}(pD_1+qD_2)\right)e^{Ckr}-\frac{S}{C}(pD_1+qD_2)$$

が分かる。

一般のhに対しては、上と同様にして、

$$u^{k+1}_{m,n;h}=\left(1-\frac{r}{p}\hat{f}^{k}_{u\,m,n;h}-\frac{r}{q}g_{u\,m,n;h}\right)u^{k}_{m,n;h}+\frac{r}{p}\hat{f}^{k}_{u\,m-1,n;h}u^{k}_{m-1,n;h}$$

$$+\frac{r}{q}\tilde{g}_u\, {}^{k}_{m,n-1;h} - \frac{r}{p}\left[p(ip\tilde{f}_{xx}+iq\tilde{f}_{xy}) + p^2\tilde{\tilde{f}}_{xx} + (ip\tilde{f}_{xu}+jq\tilde{f}_{yu})u_{m+i-1,n+j;h_1}\right]$$

$$-\frac{r}{q}\left[q(ip\tilde{g}_{xy}+jq\tilde{g}_{yy}) + q^2\tilde{\tilde{g}}_{yy} + (ip\tilde{g}_{xu}+iq\tilde{g}_{yu})u_{m+i,n+j-1,h_2}\right.$$

$$\left.-r[\tilde{h}_u u^k_{m,n;h} + ip\tilde{h}_x + jq\tilde{h}_y\right]$$

ゆえに、$N^k_h(X,Y) = \sum_{\substack{\cancel{-X-(k+1)p}\leqq mp\leqq X \\ -Y-(k+1)q\leqq nq\leqq Y}} |u^k_{m,n;h}|pq$ とおくと−

$$N^k_h(X,Y) \leqq C_1 N^0_h(X,Y) + C_2(p+q) + C_3(|i|p|+|j|q|)\cancel{+C_4}(i+j)N^0_h(X',Y')$$

$\cancel{X'=\max(X,|X+ip|)}$, $X'=X+|i|p$, $Y'=Y+|j|q$

ここで C_1, C_2, C_3, C_4 は正の定数である。したがって N^0 が $O(p+q)$ のときは、

$$N^k_h \leqq C_5 N^0_h(X,Y) + C_6(|i|p|+|j|q|)$$

となり補題は証明された。

一般の初期条件のときは、$\{u^0_{m,n}\}$ を L^1_{loc} の意味で Lipschitz 連続である $\{v^0_{m,n}\}$ で近似し、

$$N^k_h(X,Y) \leqq 2\sum_{\substack{|mp|\leqq X+|i|p| \\ |nq|\leqq Y+|j|q|}} |u^k_{m,n} - v^k_{m,n}|pq + \sum_{\substack{|mp|\leqq X \\ |nq|\leqq Y}} |v^k_{m,n;h}|pq$$

を用いればよい。（第一項が $\sum|u^0_{m,n}-v^0_{m,n}|pq$ の定数倍でおさえられることは、容易に分かる。）

補題2とまったく同様にして、t方向に関しても同様の結論が得られる。すなわち

補題3．$u^{k;i}_{m,n} = u^{k+i}_{m,n} - u^{k}_{m,n}$ とおくとき．任意の X Y に対して．

$$\sum_{\substack{|mp|\leq X \\ |nq|\leq Y}} |u^{k;i}_{m,n}| pq \leq G(|ik|), \quad G(|ik|) \to 0 \ \text{as} \ |ik| \to 0$$

補題4．任意の定数 k，($|k| \leq M$) に対して．

$$\frac{|u^{k+1}_{m,n} - k| - |u^{k}_{m,n} - k|}{h} + \frac{\{(\mathrm{sign}(u-k)) \cdot [f - f(t,x,y,k)]\}^{k}_{m,n} - \{\mathrm{sign}(u-k)[f - f(t,x,y,k)]\}^{k}_{m-1,n}}{p}$$

$$+ \frac{\{\mathrm{sign}(u-k) \cdot [g - g(t,x,y,k)]\}^{k}_{m,n} - \{(\mathrm{sign}(u-k))[g - g(t,x,y,k)]\}^{k}_{m,n-1}}{q} + \mathrm{sign}(u^{k+1}_{m,n} - k) h^{k}_{m,n} \leq 0$$

§4．差分解の収束．

$$\frac{r}{p}A = \frac{r}{q}B = \text{const} < \frac{1}{2}, \quad p_0 \|f_{xx}\| + q_0 \|g_{yy}\| < \alpha, \quad p_n = \frac{1}{2^n} p_0 \quad q_n = \frac{1}{2^n} q_0$$

とおき．

$$u^{0}_{m,n}(p_n, q_n) = \frac{1}{p_n q_n} \int_{(m-1)p_n}^{mp_n} \int_{(n-1)q_n}^{nq_n} u_0(x,y)\,dx\,dy$$

を初期条件としたときの差分方程式の解を．階段関数と考えて．Π_T 上に定義したものを

$U_n(t,x,y)$ とすると．

補題1より $\sup_{\Pi_T} |U_n(t,x,y)| \leq M$．

補題2，3より，任意の有界領域Kに対して．

$$\iint_K |U_n(t+\tau, x+h_1, y+h_2) - U_n(t,x,y)|\,dx\,dy \longrightarrow 0 \quad \text{as } |\tau|+|h_1|+|h_2| \to 0$$

が n に関して一様に成立する。

したがって各 $t \in (0,T)$ に対して．$U_n(t,x,y)$ は $L^1_{loc}(R^2)$ で相対コンパクトである。ゆえに対角線論法により，$[0,T]$ で稠密な可算個の $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ に対して．$U_{n'}(t_j,x,y) \longrightarrow u(t_j,x,y) \in L^\infty$ $(\forall j)$ となる $u(t,x,y)$ が存在する。ところが $U_n(t,x,y)$ は t 方向に関して．$L^1_{loc}(R^2)$ の意味で同程度連続であるから．u は Π_T 上で定義される。すなわち．

$\exists\, u \in L^\infty(\Pi_T)$ $\quad U_{n'} \longrightarrow u$ as $n' \to \infty$ in $L^1_{loc}(\Pi_T)$

かつ任意の $t \in [0,T]$ に対して，

$$U_{n'}(t,\cdot\,\cdot) \longrightarrow u(t,\cdot\,\cdot) \text{ as } n' \to \infty \text{ in } L^1_{loc}(R^2)$$

が t に関して一様に成立する。

このことと補題4より generalized solution の一意性を用いて，

定理．差分方程式の解の列 $U_n(t,x,y)$ は，$n \to \infty$ のとき，(5)，(6) の generalized solution に収束する。

文 献

[1]. E. Conway and J. Smoller; C.P.A.M. 19. 95–105 ('66)

[2] A. Douglis; Contributions Diff. Eqns. 1, 59–94 ('63)

[3] K. Kojima; Proc. Jap. Acad. 42. 705–709 ('66)

[4] S.N. Kružkov; Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R 187 ('69)
(Soviet math. Dokl. 10 ('69) No4)

[5] 〃 ; Mat. Sbornik 81 ('70)
(Math. USSR. Sbornik 10, 217–243 ('70))